$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\log(\pi x))dx = -\log 2\,. \tag{1}$$

**Dimostrazione** Innanzitutto, la funzione $x \in (0,1) \mapsto \log\operatorname{sen}(\pi x)$ ha singolartità integrabili in $x = 0$ e $x = 1$ e quindi l'integrale in (1) è un integrale improprio convergente. Ora,

$$\int_0^1 \log(\operatorname{sen}(\pi x))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log(\operatorname{sen} t)dt\,, \tag{2}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \log(\operatorname{sen} t)dt &= \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} t)dt + \int_{\pi/2}^\pi \log(\operatorname{sen} t)dt \\
&\overset{\mathrm{s=t-\frac{\pi}{2}}}{=} \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} t)dt + \int_0^{\pi/2} \log(\cos s)ds \\
&= \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} t\cos t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} 2t)dt - \frac{\pi}{2}\log 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \log(\operatorname{sen} t)dt - \frac{\pi}{2}\log 2\,,
\end{aligned}$$

che, assieme a (2), implica immediatamente (1). ∎